1. Функцияның дәрежелік қатарларға жіктелінуі. Тейлор және Маклорен қатарлары.

$f(x)$ функциясын дәрежелік қатарға жіктеуге, яғни дәрежелік қатардың қосындысы түрінде көрсетуге болады.

x_0 нүктесінің аймағында анықталған және осы аймақта $(n+1)$-ші ретті туындылары бар $f(x)$ функциясы үшін *Тейлор формуласы* орындалады:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \qquad (1)$$

мұндағы

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad c\in(x_0,x)$$ - *қалдық мүшесі* (Лагранж түріндегі),

c санын

$$c=x_0+\theta(x-x_0), \quad 0<\theta<1$$

түріндегі жазуға болады.

(1) формуласын қысқаша

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x), \qquad (2)$$

түрінде жазуға болады, мұндағы

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Тейлор көпмүшелігі деп аталады.

Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінің аймағында кез келген ретті туындысы бар (яғни шексіз дифференциалданатын) және $n\to\infty$ қалдық мүшесі $R_n\to 0$ $(\lim_{n\to\infty} R_n=0)$, онда Тейлор формуласынан *Тейлор қатары* деп аталатын $f(x)$ функциясының $(x-x_0)$ дәрежесі бойынша жіктелуі алынады:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (3)$$

Егер $x_0=0$ болса, онда

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (4)$$

Маклорен қатарын аламыз.

Тейлор қатарын x_0 нүктесінің аймағында кез келген шексіз дифференциалданатын функция үшін құруға болады (бұл қажетті белгісі). Бірақ бұдан қатар берілген $f(x)$ функциясына жинақталуы алынбайды, ол қатар жинақсыз немесе жинақты болуы, сондай-ақ $f(x)$ функциясына жинақталмауы да мүмкін.

Мысал 1. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{егер } x\neq 0,\\ 0, & \text{егер } x=0\end{cases}$

функциясы $x=0$ нүктесінде кез келген ретті туындысы бар, сондай-ақ кез келген n үшін $f^{(n)}(0)=0$. Онда Маклорен қатары

$$0+\frac{0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots$$

жинақты, бірақ оның $S(x)$ қосындысы кез келген x нүктесінде нөлге тең, ал $f(x)$ функциясына тең емес.

Теорема 1. $f(x)$ функциясының (3) Тейлор қатары x нүктесінде $f(x)$ функциясына жинақталуы үшін бұл нүктеде (1) Тейлор функциясының қалдық мүшесі $n\to\infty$ нөлге ұмтылуы қажетті және жеткілікті, яғни $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Ескерту: Егер (3) Тейлор қатары $f(x)$ функциясының туындылауына жинақты болса, онда Тейлор функциясының қалдық мүшесі Тейлор қатарының қалдығына тең, яғни $R_n(x)=r_n(x)$.

($R_n(x)=f(x)-S_n(x)$, мұнда $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ және $S(x)$ - Тейлор қатардың қосындысы).

Келесі теорема функцияның Тейлор қатарына жіктелуінің жеткілікті белгісін береді.

Теорема 2. Егер $f(x)$ функциясының барлық туындыларының модулі x_0 нүктесінің аймағында бір ғана $M>0$ санымен шектелген болса, онда осы аймақтағы кез келген x үшін $f(x)$ функциясының Тейлор қатары $f(x)$ функциясына жинақталады, яғни (2) жіктелуі орын алады.

2. Кейбір қарапайым (элементар) функциялардың Тейлор (Маклорен) қатарына жіктелуі.

1. $f(x)$ функциясын (4) Маклорен қатарына жіктеу үшін:
2. $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$ туындыларын табу керек;
3. $x_0=0$ нүктесінде туындының мәнін есептеу керек;
4. Берілген функция үшін (4) қатарын жазу керек және оның жинақтылық интервалын табу керек;
5. $n\to\infty$ Маклорен қатарының қалдық мүшесі $R_n(x)\to 0$ ұмтылатын $(-R;R)$ интервалын табу керек. Егер ол интервал бар болса, онда осы интервалда $f(x)$ функциясы және Маклорен қатары сәйкес келеді.

Ескерту: Дәрежелік қатардың жинақтылық интервалында қалдық қатар $n\to\infty$ нөлге ұмтылады: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

Қарапайым функциялардың Маклорен қатарына жіктелуі:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}x^n=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}x^n+\ldots,\quad \begin{cases}[-1;1], & \alpha\ge 0\\ (-1;1], & -1<\alpha<0;\\ (-1;1), & \alpha\le -1\end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\quad x\in(-1;1);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\quad x\in(-1;1];$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\quad x\in[-1;+1];$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\quad x\in[-1;+1];$$

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\operatorname{ch} x=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty);$$